

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

〔1〕 不等式

$$\sin 2x > \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

を満たす x の範囲を求めよう。ただし, $0 \leq x < 2\pi$ とする。

$a = \sin x$, $b = \cos x$ とおくと, 与えられた不等式は

$$\boxed{\text{ア}} ab + \boxed{\text{イ}} a - \boxed{\text{ウ}} b - 1 > 0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} < x < \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi < x < \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \pi$$

である。

(数学Ⅱ第1問は6ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 不等式

$$2 + \log_{\sqrt{y}} 3 < \log_y 81 + 2 \log_y \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y > \boxed{\text{サ}}$, $y \neq \boxed{\text{シ}}$ である。真数は正であるから $x < \boxed{\text{ス}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

また

$$\log_{\sqrt{y}} 3 = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y}, \quad \log_y 81 = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$$

であるから、与えられた不等式は

$$1 < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y} + \frac{\log_3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

となる。よって

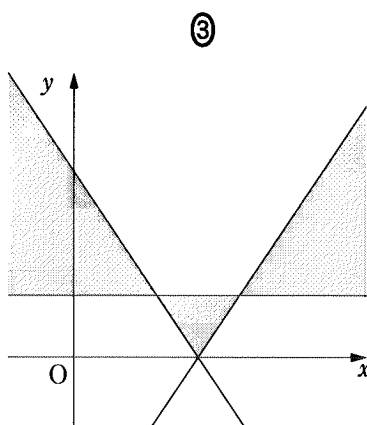
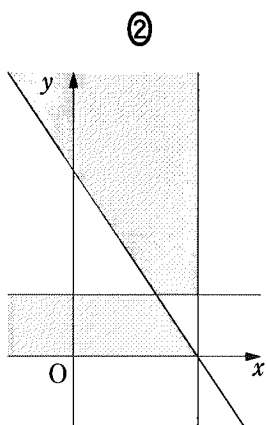
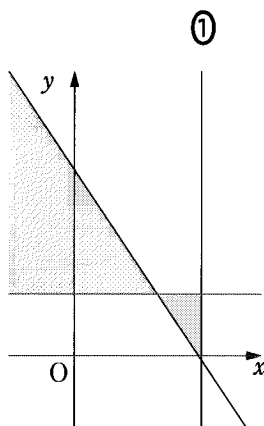
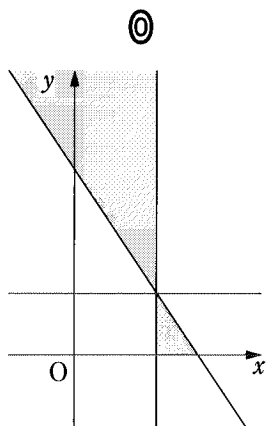
$$y > \boxed{\text{チ}} \quad \text{のとき, } \log_3 y < \log_3 \left\{ \boxed{\text{ツ}} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$\boxed{\text{テ}} < y < \boxed{\text{チ}} \quad \text{のとき, } \log_3 y > \log_3 \left\{ \boxed{\text{ツ}} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \right\}$$

となる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

求める領域を図示すると、次の図 ト の影をつけた部分となる。ただし、境界(境界線)は含まない。 ト に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。



数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

$a > 0$ として、 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = x^3 - x$$

$$g(x) = f(x - a) + 2a$$

とする。

(1) 二つの関数の差 $g(x) - f(x)$ は

$$g(x) - f(x) = a \left(\boxed{\text{アイ}} x^2 + \boxed{\text{ウ}} ax - a^2 + \boxed{\text{エ}} \right)$$

と表され、 x の方程式 $g(x) - f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつような a の範囲は

$$0 < a < \boxed{\text{オ}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

また、 $g(x) - f(x)$ は $x = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき、最大値

$$\frac{a}{\boxed{\text{ケ}}} \left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}} \right)$$

をとる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) (1)で得られた最大値を

$$h(a) = \frac{a}{\boxed{\text{ケ}}} \left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}} \right)$$

と表す。 $h(a)$ を a の関数と考えるとき、 $h(a)$ は $a = \boxed{\text{ス}}$ で最大値

$\boxed{\text{セ}}$ をとる。

(3) $a = \sqrt{3}$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の二つの交点 P, Q の座標は

$$P \left(\boxed{\text{ソ}}, 0 \right), \quad Q \left(\sqrt{\boxed{\text{タ}}}, \boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}} \right)$$

であり、二つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

さらに、交点 $P \left(\boxed{\text{ソ}}, 0 \right)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と曲線 $y = g(x)$

の接線がなす角を $\theta \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると

$$\tan \theta = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

a は実数で、 $a > 0$ 、 $a \neq 2$ とし、点 $A(a, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。また、点 $P(2, 0)$ を通り円 C に接する直線のうち x 軸でないものを ℓ_1 とし、点 $Q(-2, 0)$ を通り円 C に接する直線のうち x 軸でないものを ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるときの a の値を求めよう。

円 C の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{ア}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{イ}}\right)^2 = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

直線 ℓ_1 , ℓ_2 の傾きをそれぞれ b , c とすると、それらの方程式は

$$\ell_1: y = \boxed{\text{エ}} \left(x - \boxed{\text{オ}}\right)$$

$$\ell_2: y = \boxed{\text{カ}} \left(x + \boxed{\text{キ}}\right)$$

と表される。また、 ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるから

$$bc = \boxed{\text{クケ}}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

直線 ℓ_1 は円 C に接することから

$$\boxed{\text{エ}} \left(a - \boxed{\text{コ}} \right) \left(a - \boxed{\text{サ}} \right) = 2 \left(a - \boxed{\text{シ}} \right)$$

が成り立つ。 ($\boxed{\text{コ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ は解答の順序を問わない。)

同様に、直線 ℓ_2 が円 C に接することから

$$\boxed{\text{カ}} \left(a + \boxed{\text{ス}} \right) \left(a + \boxed{\text{セ}} \right) = 2 \left(a + \boxed{\text{ソ}} \right)$$

が成り立つ。 ($\boxed{\text{ス}}$ と $\boxed{\text{セ}}$ は解答の順序を問わない。)

したがって、 $bc = \boxed{\text{クケ}}$ より

$$a = \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

このとき、 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とすると、円 C と三角形 PQR について、

$\boxed{\text{チ}}$ 。 $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 円 C と三角形 PQR の周との共有点は 1 個である
- ② 円 C と三角形 PQR の周との共有点は 2 個である
- ③ 円 C は三角形 PQR の三つの頂点 P , Q , R を通る
- ④ 円 C は三角形 PQR の 3 辺 PQ , QR , RP に接する

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

a, b を実数とし, $a \neq 0$ とする。 x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + bx^2 + (2b - 3)x - a$$

とし, $P(a) = 0$ が成り立つとする。

(1) $P(a) = 0$ より, a と b の間には関係式

$$a^2 + \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イウ}} - \boxed{\text{エ}} = 0$$

が成り立つ。したがって, $a = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}$ または $a = \boxed{\text{キク}}$ である。

(2) $a = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}$ のとき, 3次方程式 $P(x) = 0$ は a, b の値によらない解 $x = \boxed{\text{ケコ}}$ をもつ。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(3) $a = \boxed{\text{キク}}$ とする。このとき、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = \left(x + \boxed{\text{サ}} \right) \left\{ x^2 + \left(\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}} \right) x + \boxed{\text{セ}} \right\}$$

となる。

3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような b の範囲は

$$\boxed{\text{ソ}} < b < \boxed{\text{タ}}$$

である。このとき、一つの虚数解が $c + \frac{3}{5}i$ (c は実数) ならば、 c の値は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \text{ または } -\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \text{ である。}$$

方程式 $P(x) = 0$ の解がすべて実数であるような b の範囲は、 $b \leq \boxed{\text{ソ}}$

または $b \geq \boxed{\text{タ}}$ である。このとき、三つの解の和が $\frac{4}{3}$ ならば、それらの

解は $\boxed{\text{テト}}$ ， $\boxed{\text{ナ}}$ ， $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。