

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

〔1〕 実数 x, y は

$$3^{1+\log_{10}x} - 5^y = 1 \quad \dots\dots\dots (*)$$

を満たしている。このとき

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10}x}$$

の最小値を求めよう。

真数の条件により $x > \boxed{\text{ア}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。次に、 $(*)$ より

$$5^y = \boxed{\text{イ}} \cdot 3^{\log_{10}x} - 1$$

である。 $z = 3^{\log_{10}x}$ とおくと、 $5^y > 0$ であるから、 z のとり得る値の範囲は

$$z > \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。さらに

$$K = z + \frac{\boxed{\text{オ}}}{z} - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}$$

となるから、 K は $z = \boxed{\text{キ}}$ のとき、最小値 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。このと

き、 $x = \boxed{\text{コ}}$ ， $y = \log_{\boxed{\text{サ}}} \boxed{\text{シ}}$ である。

(数学Ⅱ第1問は6ページに続く。)

数学Ⅱ

- 〔2〕 a を正の定数とする。点 O を原点とする座標平面において、中心が O で、半径が 1 の円と半径が 2 の円をそれぞれ C_1 , C_2 とする。 $\theta \geq 0$ を満たす実数 θ に対して、角 $a\theta$ の動径と C_1 との交点を P とし、角 $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}$ の動径と C_2 との交点を Q とする。ここで、動径は O を中心とし、その始線は x 軸の正の部分とする。

(1) $\theta = \pi$ のとき、 Q の座標は $(\sqrt{\boxed{\text{ス}}}, \boxed{\text{セ}})$ である。

(2) 3 点 O , P , Q がこの順に一直線上にあるような最小の θ の値は

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}} a + \boxed{\text{チ}}} \pi$$

である。 θ が

$$0 \leq \theta \leq \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}} a + \boxed{\text{チ}}} \pi$$

の範囲を動くとき、円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする おうぎ 扇形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}} a + \boxed{\text{ト}}} \pi$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(3) 線分 PQ の長さの 2 乗 PQ^2 は

$$\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}} \sin \left(\frac{\boxed{\text{ヌ}} a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \theta \right)$$

である。

(4) x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}} \sin \left(\frac{\boxed{\text{ヌ}} a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} x \right)$$

とおき, $f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとする,

$$a = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \text{ である。}$$

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

a を正の実数とし、 x の2次関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 3ax - 2a^2$$

とする。また、放物線 $y = f(x)$ および $y = g(x)$ をそれぞれ C_1 、 C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 の共有点を P とすると、点 P の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^2 \right)$

である。また、点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}ax - \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2$$

である。

(2) C_1 と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。ま

た、 C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{\text{サ}}$ 、 $\boxed{\text{シス}}$ であり、 C_2 と x 軸で囲ま

れた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- (3) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で、二つの放物線 C_1 , C_2 と 2 直線 $x = 0$, $x = 2$ で囲まれた図形を R とする。 R の中で、 $y \geq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$$0 < a \leq \boxed{\text{タ}} \text{ のとき } S(a) = -\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} a^3 + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

$$\boxed{\text{タ}} < a \leq \boxed{\text{チ}} \text{ のとき}$$

$$S(a) = -\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} a^3 + \boxed{\text{ト}} a^2 - \boxed{\text{ナ}} a + \boxed{\text{ニ}}$$

$$\boxed{\text{チ}} < a \text{ のとき } S(a) = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。したがって、 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ は $a = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ で

最小値 $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとる。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

座標平面上の円 $x^2 + y^2 = 10$ を C とし、 x の関数 $y = |k(x - 2)| - 4$ のグラフを G とする。ただし、 $k > 0$ である。このとき、 C と G の共有点の個数について考えよう。

- (1) グラフ G は直線 $x = \boxed{\text{ア}}$ に関して対称であり、 k の値にかかわらず点 $A(\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウエ}})$ を通る。

点 A を通り C に接する直線を ℓ とする。 ℓ の方程式を求めよう。接点を $P(a, b)$ とすると、 ℓ の方程式は

$$\boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}y = 10$$

と表される。点 A は ℓ 上にあり、点 P は C 上にあるので

$$\begin{cases} \boxed{\text{キ}}a - \boxed{\text{ク}}b = 10 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{ケ}}x - \boxed{\text{コサ}} \quad \text{または} \quad y = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left(x + \boxed{\text{ソタ}} \right)$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

- (2) C と G の共有点が 2 個となるような k の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} < k < \boxed{\text{テ}}$$

である。

- (3) C と G の共有点が 3 個となるような k の値は $k = \boxed{\text{ト}}$ である。このとき、3 個のうち 2 個の共有点の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} \boxed{\text{ナ}}x + y = \boxed{\text{ニ}} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

を解くことにより得られる。したがって、3 個の共有点の x 座標は

$$\boxed{\text{ヌ}}, \frac{\boxed{\text{ネ}} \pm \boxed{\text{ノ}} \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

a を実数とし、 x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + (a - 1)x^2 - (a + 2)x - 6a + 8$$

とする。

(1) $P(x)$ を $x - 3$ で割ったときの余りは アイ である。

また、 x の方程式 $P(x) = 0$ は a の値にかかわらず整数の解 $x =$ ウエ をもつ。したがって、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = \left(x + \text{オ}\right) \left\{x^2 + \left(a - \text{カ}\right)x - \text{キ}a + \text{ク}\right\}$$

となる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

- (2) 方程式 $P(x)=0$ の解がすべて実数となるような a の値の範囲は、
 $a \leq$ ケコ または $a \geq$ サ である。このとき、異なる実数解の個数が
 ちょうど 2 個となるような a の値は $a =$ ケコ, サ, $\frac{\text{シス}}{\text{セ}}$ であ
 る。

- (3) ケコ $< a <$ サ ならば方程式 $P(x)=0$ は虚数解をもつ。このと
 き、方程式 $P(x)=0$ の二つの虚数解を α, β とする。 α^2, β^2 が x の方程式

$$4x^2 - kx + 5k = 0$$

の解となるような a と定数 k の値は

$$a = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}, \quad k = \text{チ}$$

である。